Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа
07.12.2019.

VI разред

1. Основица AB једнакокраког троугла ABC је 10 cm, а угао на основици је 72°. Ако симетрала угла BAC сече крак BC у тачки D, израчунај дужину изломљене линије $BADC$.

2. За цео број кажемо да је *кул* ако је за један већи од броја дељивог са 3 (бројеви облика $3k+1$, $k \in Z$). Израчунај збир свих *кул* бројева између −300 и 300.

3. Све цифре петоцифреног броја $\overline{abcde}$ ($a \neq 0$, $e \neq 0$) су међусобно различите. При томе збир цифара једнак је 10. Када се број сабере са бројем написаним истим цифрама, али у обрнутом поретку добија се број чије су све цифре једнаке. Одреди све такве петоцифрене бројеве.

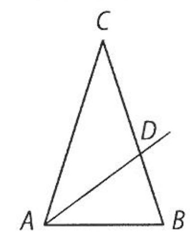
4. Микша је радио 6 тестова из математике од којих се сваки бодује целим бројем поена од 0 до 100. Он је на сваком од првих 5 тестова имао исти број поена, а на шестом је добио више поена него на претходном. Ако је у просеку на тих шест тестова остварио 72 поена, колико поена је Микша могао да освоји на последњем тесту?

5. У датом троуглу један унутрашњи угао једнак је неком спољашњем углу тог троугла. У истом троуглу један од преосталa два спољашња угла је пет пута већи од неког од преостала два унутрашња угла. Израчунај све унутрашње и спољашње углове тог троугла.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.



1. Троугао BAD је једнакокрак са угловима од 72°, 72° и 36°, па је $AB = AD$ [**8 поена**]. Троугао ADC је једнакокрак са угловима од 36°, 36° и 108°, па је $DA = DC$ [**8 поена**]. Тражена дужина изломљене линије је $BA + AD + DC = 30$cm [**4 поена**].

2. Сви кул бројеви су облика $3k+1$ ($k \in Z$) и између −300 и 300 има их укупно 200 [**8 поена**]. Потребно је да израчунамо збир $-299 + (-296) + \ldots + 295 + 298$. Ако групишемо први и последњи сабирак, други и претпоследњи, ..., n-ти члан збира са леве стране са n-тим чланом са десне стране, добијамо 100 група сабирака и у свакој је збир −1 [**8 поена**]. Дакле, тражени збир је −100 [**4 поена**].

3. (**МЛ 52/3**) Цифре броја $\overline{abcde}$ су 0, 1, 2, 3, 4 [**5 поена**]. Бројеви $\overline{abcde}$ и $\overline{edcba}$ имају једнаке збирове цифара па њихов збир има збир цифара 20. По услову задатка, све цифре у збиру су једнаке, па је тај збир 44444 [**5 поена**]. Следи да је $c = 2$, а да цифре 0 и 4 не могу бити прва ни последња [**5 поена**]. Оваквих бројева има 4: 14203, 10243, 30241 и 34201 [**5 поена**].

4. (**МЛ 53/4**) Означимо са x број освојених поена на сваком од првих 5 тестова, а са y број поена на шестом тесту. Тада је $\frac{5x+y}{6} = 72$ [**5 поена**] и $y > 72$ [**5 поена**]. Из $5x + y > 432$ налазимо да је $432 - y$ дељиво са 5 [**5 поена**], тако да постоји 5 могућности: $y \in \{77, 82, 87, 92, 97\}$ [**5 поена**].

5. Како је спољашњи угао једнак збиру друга два унутрашња, то спољашњи угао може бити једнак унутрашњем углу само код истог темена. Дакле, троугао је правоугли [**4 поена**]. Нека су унутрашњи углови α, β и γ, а одговарајући спољашњи α_1, β_1 и γ_1. Нека је $\gamma = \gamma_1 = 90°$. Могућности за остале углове су $\alpha_1 = 5\beta$, $\beta_1 = 5\alpha$, $\alpha_1 = 5\alpha$ и $\beta_1 = 5\beta$.
1) $\alpha_1 = 5\beta$. Из $\alpha_1 = \beta + \gamma$, добијамо $\beta = 22°\,30'$, $\alpha = 67°\,30'$, $\beta_1 = 157°\,30'$, $\alpha_1 = 112°\,30'$.
2) $\beta_1 = 5\alpha$. Аналогно претходном, добијемо исте величине углова.
3) $\alpha_1 = 5\alpha$. Из $\alpha + \alpha_1 = 180°$, добијамо $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, $\alpha_1 = 150°$, $\beta_1 = 120°$.
4) $\beta_1 = 5\beta$. Аналогно претходном, добијемо исте величине углова.
Дакле, унутрашњи углови тог троугла су: 22° 30′, 67° 30′ и 90° а спољашњи: 157° 30′, 112° 30′ и 90° [**8 поена**], или унутрашњи: 30°, 60° и 90° а спољашњи: 150°, 120° и 90° [**8 поена**].