Одељење учитеља Топлице

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

-тестови и решења, од 3. до 8. разреда-

2. март 2019.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа
02.03.2019

III разред

1. Лука је пошао да се састане са другом Иваном. Лука је из куће изашао у 16h 45min, а Иван у 16h 35min. Када је Иван стигао на место састанка, сат је показивао 17h 26min. Лука је био на том месту и чекао Ивана већ 12 минута. Колико је времена било потребно Луки, а колико Ивану да стигну на место састанка?

2. Дешифруј сабирање (исте цифре су замењене истим, а различите различитим словима).

$$AA + BB + CC = ABC.$$

3. Бојана је замислила један број, додала му 5, добијени збир поделила са 3, резултат помножила са 4, од добијеног броја одузела 6 па добијену разлику поделила са 7 и на тај начин добила резултат 2. Који број је Бојана замислила?

4. Запиши све римске бројеве мање од 100 који се записују помоћу две цифре.

5. Ако је $a \cdot b = 160$, израчунај:
а) $a \cdot (b \cdot 4)$; б) $(a : 4) \cdot b$; в) $(a : 2) \cdot (b \cdot 2)$; г) $(a \cdot 9) \cdot (b : 3)$.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

III РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 51-3**) Лука је стигао у 17h 14min [**5 поена**], па му је требало 15min + 14min = 29min [**5 поена**]. Ивану је требало 25min + 26min = 51min [**10 поена**].

2. $A = 1$, $B = 9$, $C = 8$, тј. решење ребуса је

$$11 + 99 + 88 = 198$$ [**20 поена**].

3. (**МЛ 53-2**) Пре последњег дељења са 7 резултат је био 14 [**4 поена**], пре одузимања броја 6 је био 20 [**4 поена**], пре множења са 4 је био 5 [**4 поена**], пре дељења са 3 био је 15 [**4 поена**], а пре додавања броја 5 био је 10 [**4 поена**]. Бојана је замислила број 10.

4. Има 12 таквих бројева:

II, IV, VI, IX, XI, XV, XX, XL, LI, LV, LX, XC.

Бодовати како је наведено у табели:

тачно наведених бројева	0-2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
поена	0	1	3	5	7	9	11	13	15	17	20

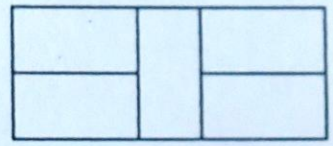
5. а) $a \cdot (b \cdot 4) = 160 \cdot 4 = 640$ [**5 поена**];
б) $(a : 4) \cdot b = 160 : 4 = 40$ [**5 поена**];
в) $(a : 2) \cdot (b \cdot 2) = 160$ [**5 поена**];
г) $(a \cdot 9) \cdot (b : 3) = 160 \cdot 3 = 480$ [**5 поена**].

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа
02.03.2019 – IV разред

1. У једној сали има 42 столице. Неке имају 3 ноге, а неке 4. Кад на сваку столицу седне по једно дете, у сали има 227 ногу (укупно, и дечјих и столица). Колико има столица са 4 ноге?

2. Правоугаоник на слици састављен је од пет једнаких правоугаоника. Обим сваког малог правоугаоника је 24cm. Колика је страница квадрата који има обим једнак обиму великог правоугаоника?



3. Три друга су за девет дана урадила 225 задатака. Да је први урадио 47 задатака мање, други 39 задатака мање, а трећи 58 задатака мање, онда би урадили исти број задатака. Колико је свако од њих урадио задатака за тих девет дана?

4. Колико има петоцифрених бројева који се исто читају гледано слева на десно и здесна на лево, чији збир цифара није већи од 5?

5. Прецртај дату табелу на папир који ћеш предати, а затим распореди бројеве 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 у празна поља прве врсте, а такође и у празна поља прве колоне (не истим редом!), тако да се може тачно попунити следећа таблица множења. Затим попуни ту таблицу.

·									
			9						
							16		
		25							
				4					16
	49								
					1				
				16					
						81			

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

IV РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 52-3**) Четрдесетдвоје деце има 84 ноге, па ногу столица има $227 - 84 = 143$ [**8 поена**]. Када би све столице имале по три ноге, укупан број ногу столица био би $3 \cdot 42 = 126$. Како је $143 - 126 = 17$, то има 17 столица са 4 ноге [**12 поена**].

2. (**МЛ 52-3**) Дужина малог правоугаоника је двапут већа од његове ширине, па је обим малог правоугаоника 6 пута већи од ширине. Дакле, странице малог правоугаоника су 4cm и 8cm [**10 поена**]. Странице великог правоугаоника су 8cm и 20cm, а његов обим је 56cm [**5 поена**]. Страница квадрата са тим обимом је 14cm [**5 поена**]. [Ако ученик погрешно одреди странице малог правоугаоника, али даље, с таквим подацима, правилно уради други део задатка, добија одговарајуће поене.]

3. Да су њих тројица урадила наведени број задатака мање, укупан број урађених задатака био би $225 - (47 + 39 + 58) = 225 - 144 = 81$ [**6 поена**]. Како би у том случају број урађених задатака за сваког од њих био једнак, то значи да би свако од њих имао $81 : 3 = 27$ урађених задатака [**8 поена**]. Број заиста урађених задатака је био: првог $27 + 47 = 74$, другог $27 + 39 = 66$, трећег $27 + 58 = 85$ [**по 2 поена** за сваки тачан одговор].

4. Како такав број мора почињати цифром различитом од нуле, а и завршавати се истом цифром, следи да средишња цифра може бити највише 3 [**4 поена**]. Могући су следећи случајеви:
1°) ако је средишња цифра 3, постоји један такав број 10301;
2°) ако је средишња цифра 2, постоји један такав број 10201;
3°) ако је средишња цифра 1, постоје три таква броја: 10101, 11111, 20102;
4°) ако је средишња цифра 0, постоје три таква броја 10001, 11011, 20002.
Дакле, укупно постоји 8 бројева са наведеном особином [За сваки тачно одређени број 2 поена, а за сваки погрешно наведени број –1 поен, с тим да укупан број поена не буде негативан].

5. [Тачно попуњена прва врста и прва колона: 15 поена; остатак табеле 5 поена.]

·	7	5	3	2	1	9	4	6	8
3	21	15	**9**	6	3	27	12	18	24
4	28	20	12	8	4	36	**16**	24	32
5	35	**25**	15	10	5	45	20	30	40
2	14	10	6	**4**	2	18	8	12	**16**
7	**49**	35	21	14	7	63	28	42	56
1	7	5	3	2	**1**	9	4	6	8
6	42	30	18	12	6	54	24	36	48
8	56	40	24	**16**	8	72	32	48	64
9	63	45	27	18	9	**81**	36	54	72

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа
02.03.2019.

V разред

1. Ана, Беца и Веца су мериле дужину ивица дрвеног квадра. Све три су измериле дужину три ивице из истог темена и свака по једну од ивица из неког другог темена. Свака је сабрала четири измерене дужине и добиле су 29cm, 31cm и 32cm. Израчунај површину тог квадра.

2. Одреди све парове (p, n), где је p прост број и n природан број, такве да је $\frac{p}{15}=\frac{2019}{n}$.

3. Записани су редом природни бројеви од 1 до 10000, без размака између бројева. Колико се пута у том низу појављује низ од четири цифре 2019?

4. Одреди два најмања природна броја чији је збир цифара једнак 2019.

5. Наведи све троцифрене природне бројеве дељиве са 9 којима су све цифре прости бројеви.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

V РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 51-3**)Збир добијених резултата све три девојчице једнак је четвороструком збиру три ивице квадра из једног темена, па је збир те три ивице једнак (29cm + 31cm + 32cm) : 4 = 23cm [**10 поена**]. Следи да су дужине тих ивица 29cm − 23cm = 6cm, 31cm − 23cm = 8cm и 32cm − 23cm = 9cm [**5 поена**]. Површина квадра је 348cm^2 [**5 поена**].

2. (**МЛ 53-3**) Дата једнакост се може написати у облику $\frac{p}{3\cdot 5}=\frac{3\cdot 673}{n}$ (број 673 је прост) [**5 поена**]. Како број p треба да буде прост, постоје три могућности:
   1°) $p=3$, $n=3\cdot 5\cdot 673=10095$;
   2°) $p=5$, $n=9\cdot 673=6057$;
   3°) $p=673$, $n=45$.
   [Сваки тачно наведени пар **по 5 поена**, макар био добијен и „пробањем“; сваки погрешно наведени пар −2 поена, с тим да укупан број поена не буде негативан.]

3. 3 пута: сам број 2019 и још два пута као крај једног и почетак наредног броја: 19**2019**21 (последње две цифре броја 1920 и прве две цифре броја 1921) и 9**2019**202 (последње три цифре броја 9201 и прва цифра броја 9202) [**20 поена**; за одговор 2 (са примером): 10 поена].

4. Како је $2019 = 224\cdot 9 + 3$, најмањи такав број је 399...99 (224 деветке) [**10 поена**], а други по величини је 4899...99 (223 деветке) [**10 поена**].

5. Цифре могу бити 2, 3, 5 или 7. Њихов збир треба да је дељив а 9, за шта постоје две могућности: 2 + 2 + 5 или 3 + 3 + 3 [**10 поена**]. Постоје четири таква броја: 225, 252, 522 и 333 [**10 поена**].
   [За три тачно наведена броја: 8 поена; за два: 4 поена; за 1 тачан: 2 поена.]

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа
02.03.2019.

VI разред

1. Колико има троуглова обима 49 код којих су дужине страница прости бројеви?

2. Ако је $a + b = -0,7$, поређај по величини вредности израза

$$|a + b - 0,5|, \quad |-2 - a - b| \quad \text{и} \quad |a + 0,3 + b - 1|.$$

3. Нека се симетрала крака AC једнакокраког троугла ABC и симетрала угла BCA секу у тачки која припада краку AB. Одреди углове троугла ABC.

4. На Олимпијади учествује 2019 такмичара. Докажи да постоји земља из које је дошло најмање 64 такмичара, или на Олимпијади учествују такмичари из најмање 33 земље.

5. На колико се начина број 450 може представити као производ шест различитих целих бројева чија апсолутна вредност није већа од 6? (Производе не сматрамо различитим ако се разликују само редоследом чинилаца.)

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

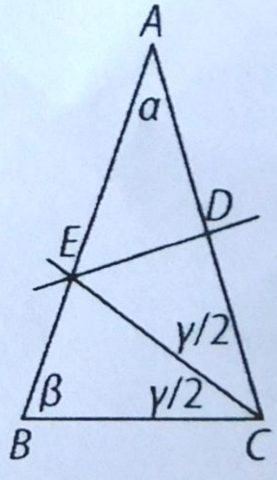
VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 51-2**) Најдужа страница троугла мора бити већа од трећине обима и мања од његове половине, у овом случају мора бити између 16 и 24. Прости бројеви у том интервалу су 17, 19 и 23. Испитивањем тих случајева добијамо 5 решења:
$23+23+3$, $23+19+7$, $23+13+13$, $19+19+11$ и $19+17+13$.
[Свако решење по 4 поена; свака нетачно наведена тројка (нпр. $41+5+3$ и сл.) бодовати са -3 поена.]

2. (**МЛ 53-3**) Вредности датих израза су, редом, $|-0{,}7-0{,}5|=1{,}2$ [**6 поена**], $|-2-(-0{,}7)|=1{,}3$ [**6 поена**] и $|-0{,}7-0{,}7|=1{,}4$ [**6 поена**], па је $|a+b-0{,}5|<|-2-a-b|<|a+0{,}3+b-1|$ [**2 поена**].

3. Означимо углове троугла са α, β и γ на уобичајени начин, са D средиште крака AC и са E тачку крака AB у којој се секу симетрале поменуте у задатку (слика). Из $\triangle ADE \cong \triangle CDE$ (СУС) (или из својства симетрале дужи) следи да је $\alpha=\dfrac{\gamma}{2}$ [**15 поена**], односно $\beta=\gamma=2\alpha$, па је
$5\alpha=180°$, $\alpha=36°$ и $\beta=\gamma=72°$ [**5 поена**].



4. Ако ниједан од наведених услова не би био испуњен, највећи могући број такмичара био би $32\cdot 63=2016<2019$, супротно податку из задатка. Зато мора бити испуњен бар један од наведених услова [**20 поена**].

5. Из $450=2\cdot 3^2\cdot 5^2$ добијају се 4 решења:

$(-5)\cdot(-3)\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 5$, $\quad (-5)\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot 3\cdot 5$,

$(-5)\cdot(-1)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot 6$, $\quad (-6)\cdot(-5)\cdot(-3)\cdot(-1)\cdot 1\cdot 5$.

[Свако тачно решење **по 5 поена**, свако нетачно -3 поена, с тим да укупан број поена не буде негативан.]

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа
02.03.2019.

VII разред

1. Одреди природан број n тако да важи:

а) $\dfrac{3\cdot 5^9+2\cdot 5^9}{5^6}=5^n$; б) $\dfrac{3^{12}\cdot 9^{11}:27^{10}}{3^n}=3$.

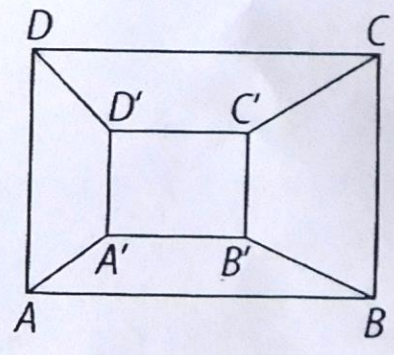
2. Одреди најмањи и највећи природан број x за који је број $a=\sqrt{66-\sqrt{x+1}}$ такође природан.

3. Колико треба да буде разломака у изразу

$$\frac{x^2\cdot x^3}{x}\cdot\frac{x^3\cdot x^4}{x^2}\cdot\frac{x^4\cdot x^5}{x^3}\cdot\ldots$$

да би његова вредност била x^{2010}?

4. У унутрашњости правоугаоника $ABCD$ смештен је правоугаоник $A'B'C'D'$ чије су странице паралелне страницама правоугаоника $ABCD$ (види слику). Ако је AB = 10cm, BC = 7cm, $A'B'$ = 4cm и $B'C'$ = 3cm, одреди шта је веће – збир површина трапеза $ABB'A'$ и $CDD'C'$ или збир површина трапеза $ADD'A'$ и $BCC'B'$.



5. Дат је троугао и на свакој од његових страница изабране су четири тачке, различите од темена троугла. Колико има четвороуглова чија су темена неке од 12 изабраних тачака?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 53-2**) а) $n = 4$ [**10 поена**];

б) $\dfrac{3^{12} \cdot 9^{11} : 27^{10}}{3^n} = \dfrac{3^{12} \cdot 3^{22} : 3^{30}}{3^n} = 3^{4-n} = 3$ за $4 - n = 1$, тј. $n = 3$ [**10 поена**].

2. (**МЛ 53-2**) За $x = 1$ је $a = \sqrt{66 - \sqrt{2}}$, а за $x = 2$ је $a = \sqrt{66 - \sqrt{3}}$, што нису природни бројеви. За $x = 3$ је $a = \sqrt{64} = 8$, па је $x = 3$ најмања од тражених вредности [**10 поена**]. Највеће x се добија када је $\sqrt{x+1} = 65$, тј. $x = 4224$, у ком случају је $a = 1$ [**10 поена**].

3. Разломци у изразу су редом једнаки $x^4, x^5, x^6, \ldots$ Ако је последњи од њих x^n, онда је вредност израза $x^{4+5+\ldots+n}$, што је једнако x^{2010} ако је $4 + 5 + \ldots + n = 2010$ [**8 поена**]. Познатим поступком се добија да је $4 + 5 + \ldots + n = (1 + 2 + \ldots + n) - 6 = \dfrac{n(n+1)}{2} - 6$, па се последња једнакост своди на $\dfrac{n(n+1)}{2} - 6 = 2010$ [**6 поена**], односно $n(n + 1) = 4032$, што је испуње-но за $n = 63$ [**5 поена**]. Број разломака у изразу је $63 - 3 = 60$ [**1 поен**].

4. Означимо висину трапеза $ABB'A'$ из темена A' са x, а висину трапеза $BCC'B'$ из темена B' са y. Тада је висина трапеза $CDD'C'$ из темена D' једнака $4 - x$, а висина трапеза $ADD'A'$ из темена A' једнака $6 - y$ [**8 поена**]. Зато је $P_{ABB'A'} + P_{CDD'C'} = \dfrac{10+4}{2}x + \dfrac{10+4}{2}(4-x) = 28$, $P_{BCC'B'} + P_{ADD'A'} = \dfrac{7+3}{2}y + \dfrac{7+3}{2}(6-y) = 30$ [**12 поена**], па је други збир већи од првог.

5. Те четвороуглове можемо поделити у две групе:
1°) они који имају по два темена на две од три странице троугла;
2°) они који имају два темена на једној страници и по једно теме на свакој од друге две странице [**4 поена**].
У првој групи, странице на којима су два темена можемо изабрати на 3 начина, а затим на свакој од њих 2 темена на 6 начина, па троуглова у овој групи има $3 \cdot 6 \cdot 6 = 108$ [**8 поена**]. У другој групи, страницу на којој су два темена можемо изабрати на 3 начина и на њој та два темена на 6 начина; даље, на свакој од преостале две странице можемо једно теме изабрати на 4 начина. Број четвороуглова у другој групи је $3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 = 288$ [**8 поена**]. Укупан број четвороуглова је $108 + 288 = 396$.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике
ученика основних школа

02.03.2019.

VIII разред

1. Реши једначину $\sqrt{x^2-3x+\frac{9}{4}}=1+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$.

2. Докажи да је број

$$S = 1 + 7 + 7^2 + 7^3 + ... + 7^{2018}$$

дељив са 19.

3. Површина омотача правилне шестостране призме је 648cm^2, а дијагонала бочне стране је 15cm. Израчунај површину призме.

4. Докажи да је производ четири узастопна непарна природна броја увећан за 16 једнак квадрату природног броја.

5. Кружнице k_1 и k_2 једнаких полупречника, са центрима A и B, редом, секу се у тачкама C и D. Полуправе AC и AD секу кружницу k_2 још у тачкама E и F. Ако је $\measuredangle CAD = 75°$, одреди $\measuredangle EBF$.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Због $x^2-3x+\frac{9}{4}=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$, $4-2\sqrt{3}=(\sqrt{3}-1)^2$ и $\sqrt{3}-1>0$, једначина се своди на $\left|x-\frac{3}{2}\right|=\sqrt{3}$ [**12 поена**]. Њена решења су $\frac{3}{2}+\sqrt{3}$ и $\frac{3}{2}-\sqrt{3}$ [**8 поена**]. (Признати и ако су решења записана у облику $\frac{5}{2}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}$, $\frac{1}{2}-\sqrt{4-2\sqrt{3}}$) [Ако такмичар изостави знак апсолутне вредности код $\left|x-\frac{3}{2}\right|$ или добије само једно решење последње једначине, бодује се са 0 поена.]

2. (**МЛ 53-3**) *I решење.* $1+7+7^2+7^3+\ldots+7^{2016}+7^{2017}+7^{2018}$
$=(1+7+7^2)+7^3\cdot(1+7+7^2)+\ldots+7^{2016}\cdot(1+7+7^2)=57\cdot(1+7^3+\ldots+7^{2016})$,
што је дељиво са 19 јер је $57=19\cdot 3$ [**20 поена**. Ако се констатује да је $1+7+7^2=57$ дељиво са 19, без извођења даљих закључака: 7 поена].

II решење. Остаци степена броја 7 при дељењу са 19 су, редом, 7, 11, 1, 7, 11, 1, ... [**7 поена**]. Зато збир било која три узастопна степена даје остатак $7+11+1=19$, тј. дељив је са 19 [**7 поена**]. Како је $3 \mid 2019$, то груписањем сабирака датог збира (који има 2019 сабирака) у групе по три узастопна, добијамо да је $19 \mid S$ [**6 поена**].

3. (**МЛ 53-2**) Ако са a означимо основну ивицу, а са H висину призме, из услова задатка добијамо да је $6aH=648$ и $a^2+H^2=225$ [**4 поена**]. Из $2aH=216$ и $a^2+H^2=225$ следи да је $(a+H)^2=a^2+H^2+2aH=225+216=441$, па је $a+H=21$ [**4 поена**]. Из $a+H=21$ и $aH=108$ добија се да постоје две могућности:
1°) $a=12$, $H=9$ [**3 поена**], и 2°) $a=9$, $H=12$ [**3 поена**]. У првом случају површина је $(432\sqrt{3}+648)\text{cm}^2$ [**3 поена**], а у другом $(243\sqrt{3}+648)\text{cm}^2$ [**3 поена**].

4. $(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)+16$ [**8 поена**] $=(4n^2-1)(4n^2-9)+16$
$=16n^4-40n^2+25$ [**6 поена**] $=(4n^2-5)^2$ за $n\geq 2$ [**6 поена**].

5. Како је $ACBD$ ромб, дакле паралелограм, то је $\measuredangle ECB=\measuredangle CAD=75°$ (слика) [**6 поена**]. $\triangle BCE$ је једнакокраки троугао, па је $\measuredangle BEA=\measuredangle BEC=\measuredangle ECB=75°$. Слично је $\measuredangle BFA=75°$ [**7 поена**]. Према томе је $\measuredangle EBF=360°-3\cdot 75°=135°$ [**7 поена**]. [Признати и ако се одреди конкаван $\measuredangle EBF=225°$.]