

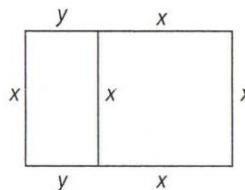
#### IV РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључка.  
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (МЛ 50/4) а) 9 [10 поена]; б) 96 [10 поена].

2. Мора бити  $D = 9$  (иначе се не би могао добити збир 20) [4 поена]. Сада добијамо да мора бити  $M = 7$  [4 поена] и  $L + C + C = 7$ . За ово последње постоје три могућности:  $L = 1$ ,  $C = 3$ , затим  $L = 3$ ,  $C = 2$  и  $L = 5$ ,  $C = 1$ . Решења ребуса су  $71 + 973 + 973 = 2017$ ,  $73 + 972 + 972 = 2017$ ,  $75 + 971 + 971 = 2017$  [свако решење по 4 поена].

3. Ако са  $x$  означимо страницу додатог квадрата, онда се обим Живорадове њиве повећао за  $2x = 162m - 98m = 64m$ , одакле је  $x = 32m$  [6 поена]. Како је збир различитих страница првобитне њиве  $98m : 2 = 49m$ , то су те странице биле  $32m$  и  $49m - 32m = 17m$  [6 поена]. Нова њива има странице  $32m$  и  $32m + 17m = 49m$  [4 поена], па је њена површина  $32m \cdot 49m = 1568m^2$  [4 поена].



4. Из прва два услова добијамо да зелена и плава мајица заједно коштају  $(2017 - 7) : 2 = 1005$  динара, а црвена и жуте заједно  $1005 + 7 = 1012$  динара [7 поена]. Слично, из услова да је плава 27 динара скупља од зелене добијамо да је цена зелене  $(1005 - 27) : 2 = 489$  динара, а плаве  $489 + 27 = 516$  динара [7 поена]. Сада је цена жуте мајице  $516 + 7 = 523$  динара [3 поена], а црвене  $1012 - 523 = 489$  динара [3 поена].

5. Задатак има више решења. На пример:  $1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 4 + 4 + 4 + 5 + 6 + 6 + 6 = 40$  [било које тачно решење 20 поена].

1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа  
25.03.2017.

#### IV разред

1. Реши једначине:  
а)  $(x \cdot 4 - 4) : 4 - 4 = 4$ ;  
б)  $x : 4 - 4 \cdot 4 - 4 = 4$ .
2. Дешифруј ребус. Различита слова представљају 

М	Л
Д	М
М	С
+	Д
Д	М
М	С
2	0
1	7

 различите цифре, а иста слова исте цифре. Нађи сва решења.
3. Живорад је имао њиву облика правоугаоника чији је обим 98m. Уз своју њиву је купио још једну облика квадрата. Сада има њиву облика правоугаоника чији је обим 162m. Колика је површина њиве коју сада има?
4. Четири мајице, плава, зелена, црвена и жута, коштају укупно 2017 динара. Цена црвене и жуте мајице заједно је за 7 динара већа од цене зелене и плаве мајице заједно. Плава мајица је 7 динара јефтинија од жуте, а 27 динара скупља од зелене. Колико кошта црвена мајица?
5. Прецијтјај табелу на папир који ћеш предати. Почињући од цифре 1 у горњем левом углу нацртјај изломљену линију до доњег десног угла са цифром 6. При томе се од цифре до цифре може ићи само слева надесно и одозго надоле и збир цифара (укључујући прву јединицу и последњу шестицу) прецијтаних изломљеном линијом треба да буде 40.

1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 150 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа  
25.03.2017.

V разред

- Збир три броја је 2,2. Ако се први сабирац повећа за 1,2, други смањи за 0,2 и трећи смањи за збир 0,4 + 0,5 израчунај збир тако добијених бројева.
- Док се Миша припремао за ово такмичење, његов млађи брат Пера је кришом истргнуо 30, не обавезно суседних, листова из једне од Мишиних збирки задатака. Пера је затим сабрао бројеве којима су нумерисане стране на истргнутим листовима и тврди да је добио збир 2017. Да ли је то могуће?
- Зоран има коцку на чијој свакој страни је написано или 2 или 4 или 8. Бацао је коцку двапут. После првог бацања сабрао је свих 5 бројева на видљивим странама коцке и добио збир 16. После другог бацања добио је збир 20. Одреди бројеве који су написани на странама коцке и начине на које се могу добити збиркови 16 и 20. Нађи једно решење.
- Одреди све начине да се слова  $A, B, C, D, E$  замене бројевима из скupa  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  (иста слова истим, а различита различитим бројевима) тако да важе неједнакости:  
$$A > B, \quad C > A, \quad C > D \text{ и } D > E.$$
- Аца је поделио неки прост број  $n$  са 60 и као остатак је добио сложен број. Који је остатак добио Аца?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 150 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

V РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.  
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (МЛ 51/3)  $2,2 + 1,2 - 0,2 - (0,4 + 0,5)$  [10 поена]  
 $= 2,3$  [10 поена].

2. Бројеви којима су нумерисане стране једног листа су два узастопна природна броја, па је њихов збир непаран број [10 поена]. Збир тридесет непарних бројева је паран број, па не може бити једнак 2017 [10 поена].

Напомена. Не признавати одговор „не“ без образложења.

3. Бројеви су 8, 4, 4, 4, 2, 2 [10 поена]. Збиркови се добијају као  $4 + 4 + 4 + 2 = 16$  [5 поена] и  $8 + 4 + 4 + 2 + 2 = 20$  [5 поена].

Напомена. Може се показати да је ово решење јединствено, али то се не тражи (и не бодује) у задатку.

4. Треба да важи  $C > A > B$  и  $C > D > E$ , па мора бити  $C = 5$  и не сме бити  $A = 1$  нити  $D = 1$ . Разматрајући случајеве  $A \in \{2, 3, 4\}$  добијамо решења као у табели.

$A$	2	3	3	4	4	4
$B$	1	2	1	3	2	1
$C$	5	5	5	5	5	5
$D$	4	4	4	2	3	3
$E$	3	1	2	1	1	2

[Једно тачно решење 2 поена; два тачна решења 4 поена; три тачна решења 7 поена; четири тачна решења 11 поена; пет тачних решења 15 поена; шест тачних решења 20 поена. Свако погрешно решење -1 поен (с тим да укупан збир не може бити негативан).]

5. Према условима задатка, прост број  $n$  се представља у облику  $n = 60k + r$ , где је  $r$  сложен број и  $r \in \{0, 1, 2, \dots, 59\}$  [5 поена]. Број  $r$  не може бити дељив са 2, 3 или 5 јер иначе број  $n$  не би био прост [10 поена]. Једини сложен број мањи од 60 чији је најмањи прост чинилац 7 (или већи) јесте број  $7^2 = 49$  и он је (једино) решење задатка [5 поена].

Напомена: „Погођен“ одговор 49, са провером (нпр.  $n = 109$ ), без доказа да је решење јединствено - 10 поена.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике  
ученика основних школа  
25.03.2017.

VI разред

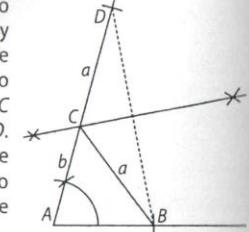
- Конструиши троугао ако је  $c = 4\text{cm}$ ,  $a + b = 9\text{cm}$  и  $a = 75^\circ$ .
- Симетрале спољашњих углова троугла  $ABC$  образују троугао чији су унутрашњи углови  $30^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $80^\circ$ . Израчунај унутрашње углове троугла  $ABC$ .
- Рационални бројеви  $a$ ,  $b$  и  $c$  су такви да је један позитиван, један негативан и један једнак нули. Ако је  $\frac{(b-a)\cdot(c-b)}{b} < 0$ , одреди који од тих бројева је нула, који позитиван, а који негативан.
- На табли је написан израз  
$$2 : 3 : 5 : 7$$
  
Дописивањем два пара заграда на разне начине, добијају се изрази са различитим вредностима. Одреди све могуће резултате који се на тај начин могу добити.
- Колико има природних бројева мањих од  $10000$  чији је производ цифара  $42$ ?

Сваки задатак се бодује са по  $20$  бодова.  
Израда задатака траје  $150$  минута.  
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.  
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

- Уочимо троугао  $ABC$  у коме важе услови задатка. Како је дат збир странница  $a$  и  $b$ , уочимо на полуправој  $AC$  тачку  $D$  такву да је  $AD = a + b$ . У троуглу  $ABD$  познате су нам две странице и угао обухваћен њима па га можемо конструисати [10 поена]. Троугао  $BCD$  је једнакокрак ( $BC = CD$ ) па се теме  $C$  налази на симетралама основице  $BD$ . Дакле, треће теме троугла налази се у пресеку симетрала странице  $BD$  и полуправе  $AC$  [10 поена] чиме смо одредили сва три темена троугла. [Уколико ученик не конструише угао од  $75^\circ$  већ га нацрта одузети 5 поена].
- Нека су  $A_1, B_1, C_1$  темена добијеног троугла ( $A_1$  је пресек симетрала спољашњих углова код  $B$  и  $C$  датог троугла, итд.), при чему су његови углови  $\alpha_1 = 30^\circ$ ,  $\beta_1 = 70^\circ$ ,  $\gamma_1 = 80^\circ$ . Тада је, из троугла  $BCA_1$ ,  $\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) + \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) + 30^\circ = 180^\circ$  [10 поена], одакле  $\frac{\beta + \gamma}{2} = 30^\circ$ ,  $\beta + \gamma = 60^\circ$  и  $\alpha = 120^\circ$  [5 поена]. Слично се добија  $\beta = 40^\circ$ ,  $\gamma = 20^\circ$  [5 поена].
- (МЛ 50/5) Мора бити  $b \neq 0$  [4 поена]. Даље постоје две могућности:  
а) Ако је  $a = 0$ , дата неједнакост се, скраћивањем са  $b$ , своди на  $c - b < 0$  [4 поена].  
б) Ако је  $c = 0$ , скраћивањем се добија  $-(b - a) < 0$ , тј.  $b - a > 0$  [4 поена], па мора бити  $b > 0$  и  $a < 0$  [4 поена].
- Постоји 5 могућности распореда заграда који дају 4 различита резултата:  
$$((2:3):5):7 = \frac{2}{105}; \quad (2:3):(5:7) = \frac{14}{15}; \quad 2:(3:(5:7)) = \frac{70}{3}; \quad (2:(3:5)):7 = \frac{10}{21};$$
$$2:(3:(5:7)) = \frac{10}{21}. \quad (\text{доволно је навести један од два случаја који дају резултат } \frac{10}{21})$$
  
[Сваки тачан резултат по 5 поена]
- Очигледно постоје два таква двоцифрена броја:  $67$  и  $76$  [2 поена]. Троцифрени бројеви са том особином се формирају од цифара  $2, 3, 7$  (има их 6:  $237, 273, 327, 372, 723, 732$  [4 поена]) или  $1, 6, 7$  (такође 6:  $167, 176, 617, 671, 716, 761$  [4 поена]). За четвороцифрени бројеве постоје следеће могућности:  
а) цифре  $1, 2, 3, 7$  (24 броја:  $1237, 1273, 1327, 1372, 1723, 1732$ , затим, слично, 6 бројева са првом цифром 2, 6 са првом цифром 3 и 6 са првом цифром 7) [5 поена];  
б) цифре  $1, 1, 6, 7$  (12 бројева:  $1167, 1176, 1617, 1671, 1716, 1761, 6117, 6171, 6711, 7116, 7161, 7611$ ) [5 поена].  
Дакле, укупно има  $2 + 6 + 6 + 24 + 12 = 50$  таквих бројева.  
Напомена: Ученици не морају да пишу конкретна решења у датим случајевима.



Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике ученика основних школа  
25.03.2017.

VII разред

1. Одреди последњу цифру броја

$$(9 - 5) \cdot (9^2 - 5^2) \cdot (9^3 - 5^3) \cdot \dots \cdot (9^{10} - 5^{10}).$$

2. У сваком темену квадрата написан је по један природан број. Сва четири броја су различита. Затим је на свакој страници квадрата написан производ два броја који су записани у теменима спојеним том страницом. Збир четири добијена производа је 124. Одреди збир бројева у теменима квадрата.

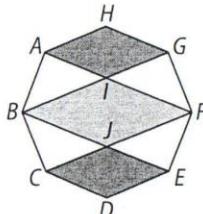
3. У четвороуглу  $ABCD$  углови код темена  $A$ ,  $B$  и  $D$  су од  $45^\circ$ .

a) Докажи да су праве  $AC$  и  $BD$  међусобно нормалне и да је  $AC = BD$ .

b) Одреди површину четвороугла  $ABCD$  ако је  $BD = 10\text{cm}$ .

4. На слици је правилан осмоугао  $ABCDEFGH$ .

Докажи да је збир површина четвороуглова  $AIGH$  и  $CDEJ$  једнак површини четвороугла  $BJFI$ .



5. Јоца треба да на рачунару умањи неку слику на  $31,2\%$  њене оригиналне величине. Програм који има на располагању омогућава само смањивање слика на  $p\%$  њихове почетне величине, где  $p \in \{1, 2, 3, \dots, 99\}$ . Како Јоца може да добије тражено смањење, примењујући расположиви програм двапут узастопно? Одреди сва решења.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 150 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак различит од кључка. Бодовање прилагодити решењу.

1. Последње цифре бројева  $9, 9^2, 9^3, \dots, 9^{10}$  су, редом,  $9, 1, 9, 1, \dots, 1$  [5 поена], а последња цифра броја  $5^n$  је 5, па су последње цифре датих чинилаца, редом,  $4, 6, 4, 6, \dots, 6$  [5 поена]. Множењем се добијају бројеви чије су последње цифре редом  $4, 4, 6, 6, 4, 4, 6, 6, 4, 4$ , па је тражена цифра 4 [10 поена].

2. Нека су  $a, b, c, d$  бројеви написани у теменима квадрата, тако да су  $a$  и  $c$  бројеви у супротним теменима. Тада су на страницима квадрата написани бројеви  $ab, bc, cd, da$ . Као је збир производа једнак  $ab + bc + cd + da = (a+c)(b+d) = 124$  [10 поена], а једини начин да се 124 напише у облику производа два броја већа од 2 је  $124 = 4 \cdot 31$ , то је збир бројева у теменима квадрата једнак  $(a+c) + (b+d) = 4 + 31 = 35$  [5 поена за резултат + 5 поена за образложење да је јединствен].

3. а) Нека је  $E$  пресек правих  $AD$  и  $BC$ ,  $F$  пресек правих  $AB$  и  $DC$  и  $M$  пресек правих  $AC$  и  $BD$ . Троуглови  $ABE$  и  $ADF$  имају по два угла од  $45^\circ$ , па су (једнакокрако)-правоугли, те је  $BE \perp AD$  и  $DF \perp AB$ , тј.  $BE$  и  $DF$  су висине троугла  $ABD$ , а тачка  $C$  је његов ортоцентар. Но, онда и права  $AC$  садржи висину тог троугла, тј.  $AC \perp BD$  [8 поена]. Према доказаном  $AE = BE = EC = ED$ , па су правоугли троуглови  $AEC$  и  $BED$  подударни ( $CUS$ ), одакле је  $AC = BD$  [6 поена].

Напомена: Ако се прво докаже да је  $AC = BD$  (могуће је без коришћења њихове нормалности), бодовати са 8 поена, а доказ нормалности (могуће без помињања ортоцентра) са 6 поена.

б) Тражена површина четвороугла је једнака

$$P_{ABD} - P_{BDC} = \frac{1}{2} BD \cdot AM - \frac{1}{2} BD \cdot CM = \frac{1}{2} BD \cdot (AM - CM) = \frac{1}{2} BD \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 10\text{cm} \cdot 10\text{cm} = 50\text{cm}^2 \quad [6 \text{ поена}].$$

4. (МЛ 51/2) Право решење. Како је  $\angle FGB = \angle FAB = 90^\circ$ , а  $\angle HGL = \angle HAL = 45^\circ$  и  $AH = HG$ , следи да је четвороугао  $AIGH$  ромб. Исто важи за четвороугао  $CDEJ$  [6 поена]. Нека је  $a$  дужина

$$\text{странице датог осмоугла. Тада је } P_{AIGH} = P_{CDEJ} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2} \quad [7 \text{ поена}]. \text{ Четвороугао } BJFI \text{ је такође}$$

ромб са оштрим углом од  $45^\circ$  и страницом  $a\sqrt{2}$ , па је његова површина  $P_{BJFI} = a^2\sqrt{2}$  [7 поена]. Одатле следи тврђење.

Друго решење. Као у првом решењу се доказује да је  $AIGH$  паралелограм [6 поена]. Нека је  $P$  подножје нормале из тачке  $A$  на праву  $BG$ .  $AH$  је страница осмоугла, одговарајућа висина једнака  $AP$ . Из једнакокраког правоуглог троугла  $ABP$  је  $AP = AB \frac{\sqrt{2}}{2} = a \frac{\sqrt{2}}{2}$ , па је површина

$AIGH$  једнака  $a^2 \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Слично за  $CDEJ$  [7 поена]. Из једнакокраког правоуглог троугла  $ABI$  је  $BI = AB \sqrt{2} = a\sqrt{2}$ , а одговарајућа висина је једнака страници осмоугла ( $BC$  или  $GF$ ), па је површина  $BJFI$  једнака  $a^2\sqrt{2}$  [7 поена].

5. Задатак се своди на представљање броја  $31,2\%$  у облику производа  $p\% \cdot q\%$ ,  $p, q \in \{1, 2, 3, \dots, 99\}$ . Како је  $31,2\% = \frac{3120}{10000} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13}{100 \cdot 100}$  [4 поена], то се добијају следеће 4 могућности:

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}{100} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 13}{100} = 40\% \cdot 78\%; \quad \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}{100} \cdot \frac{5 \cdot 13}{100} = 48\% \cdot 65\%;$$

$$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5}{100} \cdot \frac{3 \cdot 13}{100} = 80\% \cdot 39\%; \quad \frac{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{100} \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 13}{100} = 60\% \cdot 52\% \quad [\text{Свако решење по 4 поена}].$$

Министарство просвете, науке и технолошког развоја  
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Окружно такмичење из математике  
ученика основних школа  
25.03.2017.

VIII разред

- Дужина бочне ивице правилне шестостране пирамиде је  $\sqrt{39}$  cm, а апотема са равни основе заклапа угао од  $60^\circ$ . Колика је запремина те пирамиде?
- Докажи да не постоје природни бројеви  $x$  и  $y$  такви да је  $2015x + y^2 = 2017^{2017}$ .
- У троуглу  $ABC$  је  $\angle ABC = 60^\circ$ . Симетрала  $AD$  угла код  $A$  ( $D \in BC$ ) и симетрала  $CE$  угла код  $C$  ( $E \in AB$ ) секу се у тачки  $O$ . Докажи да је  $OD = OE$ .
- Колико има тачака у трећем квадранту  $xOy$  равни које припадају графику линеарне функције  $5x + 11y + 217 = 0$ , а чије су обе координате целобројне?
- Одреди број свих троуглова чије су све странице уједно дијагонале датог конвексног десетоугла.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.

Израда задатака траје 150 минута.

Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

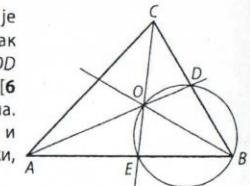
VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.  
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (МЛ 51/3) Нека је  $S$  врх пирамиде,  $O$  центар основе,  $E$  средиште једне основне ивице и, као и обично,  $a$  основна ивица,  $b$  бочна ивица,  $h$  апотема и  $H$  висина пирамиде. Тада се добија  $OE = \frac{1}{2}SE = \frac{1}{2}h$ ,  $OS = H = \frac{1}{2}h\sqrt{3}$ ,  $a = \frac{1}{3}h\sqrt{3}$ , па из  $39 = b^2 = \frac{1}{3}h^2 + \frac{3}{4}h^2 = \frac{13}{12}h^2$  следи  $h = 6$  см и  $a = 2\sqrt{3}$  см [10 поена]. Сада је  $H = 3\sqrt{3}$  см [5 поена] и  $V = 54$  см<sup>3</sup> [5 поена].

2. Претпоставимо да такви бројеви постоје. Последња цифра броја  $2015x$  је 0 или 5, а последња цифра броја  $y^2$  не може бити 2 ни 7. Дакле, последња цифра броја на левој страни не може бити 7 [10 поена]. Последње цифре бројева  $2017^n$  су, редом, 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, ..., тј. понављају се с периодом 4, па је последња цифра броја  $2017^{2017}$  иста као за  $2017^1$ , тј. једнака је 7 [10 поена]. Зато дата једнакост не може да важи.

3. Право решење. Збир углова код темена  $A$  и  $C$  у  $\triangle ABC$  једнак је  $120^\circ$ . Следи да је збир углова код истих темена у  $\triangle AOC$  једнак  $60^\circ$ . Зато је  $\angle DOE = \angle AOC = 120^\circ$  [6 поена]. Следи да је  $\angle BEOD$  тетивни четвороугао (збир углова код темена  $B$  и  $O$  је  $180^\circ$ ) [6 поена]. Посматрајмо кружницу  $K$  описану око тог четвороугла. Трећа симетрала угла троугла  $ABC$  садржи тачку  $O$  и половину лук  $ED$  кружнице  $K$ . Како су лукови  $OD$  и  $OE$  једнаки, следи да су и одговарајуће тетиве  $OE$  и  $OD$  једнаке [8 поена].



Друго решење. Из троугла  $ABD$  имамо  $\angle ADB = 180^\circ - \left(60^\circ + \frac{a}{2}\right) = 120^\circ - \frac{a}{2}$ . Слично је  $\angle CEB = 180^\circ - \left(60^\circ + \frac{\gamma}{2}\right) = 120^\circ - \frac{\gamma}{2}$ . Како је  $\angle ADB + \angle CEB = 120^\circ - \frac{a}{2} + 120^\circ - \frac{\gamma}{2} = 240^\circ - \frac{a+\gamma}{2} = 180^\circ$

то праве  $AB$  и  $CE$  заклапају исти угао као и праве  $BC$  и  $AD$  [10 поена]. Нека су  $F$  и  $G$  подножја нормала из тачке  $O$  на праве  $BC$  и  $AB$  тим редом.  $OF = OG$  јер је  $O$  центар уписане кружнице, а тачке  $F$  и  $G$  тачке додира те кружнице и одговарајуће странице троугла  $ABC$ . Троуглови  $OEG$  и  $ODF$  су подударни јер имају по један прав угао, једнаке катете и наспрам те катете једнаке углове. Следи да су им и хипотенузе  $OE$  и  $OD$  једнаке, одакле следи тврђење задатка [10 поена].

4. Из  $x = \frac{-11y - 217}{5} = -2y - 43 - \frac{y+2}{5}$  се добија да мора бити  $y+2 = 5z$ , где је  $z$  цео број,

одакле је  $y = 5z - 2$ ,  $x = -11z - 39$ ,  $z \in Z$  [10 поена]. Обе вредности  $x$  и  $y$  ће бити негативне за  $z \in \{0, -1, -2, -3\}$ , тј. тражени број парова тачака је 4 [10 поена]. [Одговарајуће тачке су  $(-39, -2)$ ,  $(-28, -7)$ ,  $(-17, -12)$ ,  $(-6, -17)$ , али их није неопходно наводити. Ако се те тачке наведу, али се не докаже да их нема више бодовати са 10 поена.]

5. Право решење. Укупан број троуглова чија су темена уједно темена датог десетоугла је  $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$  [5 поена]. Међу њима постоји 10 оних чије су две странице уједно (суседне) странице тог десетоугла [5 поена], као и  $10 \cdot 6 = 60$  оних чије је једна страница уједно страница десетоугла [5 поена]. Дакле, тражени број троуглова је  $120 - 10 - 60 = 50$  [5 поена].

Друго решење. Означимо дати десетоугао са  $A_1A_2\dots A_{10}$ . Посматрајмо троуглове чије је једно теме  $A_1$ . Ако је друго теме  $A_3$ , за треће постоји 5 могућности; ако је друго  $A_4$ , постоји 4 могућности; ...; ако је друго теме  $A_7$ , постоји само једна могућност ( $A_9$ ). Дакле, број таких троуглова је  $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$  [10 поена]. Понављајући овај поступак добија се  $15 \cdot 10 = 150$ , али тиме је сваки троугао бројан трипут, па је тражени број троуглова  $150 : 3 = 50$  [10 поена].