ОШ "Љупче Николић", Алексинац

Општинско такмичење из математике

ТЕСТОВИ СА РЕШЕЊИМА

5-8. разред

27. 2. 2016.

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа
27.02.2016.

V разред

1. Одреди све скупове X за које важи
$$\{a, b, c\} \cup X = \{a, b, c, d\}.$$

2. Одреди природан број n који је дељив са 3 и задовољава услов
$$\frac{4}{9} < \frac{n}{2016} \leq \frac{25}{56}.$$

3. Од две кутије шибица величине 6cm × 4cm × 1cm сложен је један квадар. Коју вредност може имати површина тог квадра?

4. Одреди најмањи природан број који при дељењу са 3 даје остатак 2, при дељењу са 5 даје остатак 3 и при дељењу са 7 даје остатак 5.

5. На табли је написан број 201602. Два дечака играју игру у којој наизменично вуку потезе. Један потез се састоји у повећавању за по 1 неке две (произвољно изабране) цифре претходно добијеног броја. Победник је онај после чијег потеза су све цифре написаног шестоцифреног броја једнаке. Да ли у овој игри може постојати победник?

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

V РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. Скуп X може бити један од следећих осам скупова:
$\{d\}, \{a, d\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}$.
(1 скуп тачно наведен: 0 поена; 2–4 скупа: 5 поена; 5-6 скупова: 10 поена; 7 скупова: 15 поена; сви тачно наведени: 20 поена. За сваки нетачно наведени скуп одузети 2 поена. Укупан број поена не може бити негативан).

2. (**МЛ 49/3**) Како је $2016 = 4 \cdot 9 \cdot 56$, то полазну неједнакост можемо написати у облику $\frac{896}{2016} < \frac{n}{2016} \leq \frac{900}{2016}$, па је сада $896 < n \leq 900$ (**10 поена**). Како n мора бити и дељиво са 3, то имамо два решења: 897 и 900 (свако решење по **5 поена**).

3. Површина једне шибице је $2 \cdot (6\text{cm} \cdot 4\text{cm} + 6\text{cm} \cdot 1\text{cm} + 4\text{cm} \cdot 1\text{cm}) = 68\text{cm}^2$. Површина две шибице је 136cm^2 (**5 поена**). Површина квадра у cm^2 добија се када се од 136 одузму површине две стране шибица које се поклапају у спајању. Дакле, у зависности од начина спајања површина добијеног квадра може бити: $136\text{cm}^2 - 2 \cdot 6\text{cm} \cdot 4\text{cm} = 88\text{cm}^2$; $136\text{cm}^2 - 2 \cdot 6\text{cm} \cdot 1\text{cm} = 124\text{cm}^2$; $136\text{cm}^2 - 2 \cdot 4\text{cm} \cdot 1\text{cm} = 128\text{cm}^2$ (свако тачно решење по **5 поена**).

4. Ако траженом броју додамо 2 он ће бити дељив и са 5 и са 7, тј. биће дељив са 35. Дакле, тражени број је облика $35k - 2$ (**10 поена**) ($k \in N$), па он може бити 33, 68, 103, ... Провером закључујемо да је најмањи међу овим бројевима који при дељењу са 3 даје остатак 2 број 68 (**10 поена**).

5. (**МЛ 49/5**) Збир цифара броја 201602 је 11, тј. непаран број. Ако један дечак повећава за по 1 две цифре, то ће после његовог потеза збир цифара новог броја бити за 2 већи од претходног па ће и он бити непаран. Ако победник треба да има 6 једнаких цифара у броју, њихов збир мора бити паран, а како се то не постиже ни после једног потеза два дечака, то у игри не постоји победник (**20 поена**. Не признавати одговор НЕ ако је без образложења).

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа
27.02.2016.

VI разред

1. Дужине страница троугла ABC, у центиметрима, су цели бројеви, при чему је $b = 3a$. Ако је $c = 36$cm, коју најмању, а коју највећу вредност може имати обим тог троугла?

2. Да ли се квадратна табла 3×3 може попунити бројевима $-3, 0, 3$ тако да збир бројева у свакој колони, врсти и дијагонали буде различит?

3. Нека је $ABCD$ квадрат, а CDE једнакостранични троугао у спољашњости тога квадрата. Нека је F пресек дужи AE и CD. Одреди величину угла EFC.

4. Колико има природних бројева који су делиоци броја:
а) 2015; б) 2016?

5. Нека су a, b, c, d, e, f, g бројеви 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 у неком редоследу. Докажи да је $(a-1)(b-2)(c-3)(d-4)(e-5)(f-6)(g-7)$ паран број.

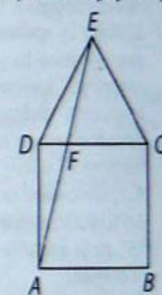
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VI РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа.
Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

1. (**МЛ 50/1**) Из неједнакости која важи за однос страница у троуглу следи $b - a < c < b + a$, тј. $2a < 36\text{cm} < 4a$ (**5 поена**), одакле је $9\text{cm} < a < 18\text{cm}$, дакле $10\text{cm} \le a \le 17\text{cm}$ (**10 поена**). Како је обим троугла једнак $O = a + b + 36 = 4a + 36\text{cm}$, најмања могућа вредност обима је 76cm, а највећа 104cm (**5 поена**).

2. Не може. Збир три броја од којих сваки припада скупу $\{-3, 0, 3\}$ може бити $-9, -6, -3, 0, 3, 6, 9$, па постоји 7 могућих збирова. Како врста, колона и дијагонала има 8, по Дирихлеовом принципу у бар две од њих би збир био исти (**20 поена**).



3. Тругао AED је једнакокрак па је $\measuredangle ADE = 150°$ и $\measuredangle DEA = 15°$ (**5 поена**). Како је $\measuredangle DEC = 60°$, то је $\measuredangle FEC = 45°$ (**5 поена**). Из троугла EFC добијамо $\measuredangle EFC = 180° - \measuredangle FEC - \measuredangle ECF = 75°$ (**10 поена**).

4. (**МЛ 50/1**) а) $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$. Бројеви 5, 13, 31 се могу као фактори делиоца појавити 0 или 1 пут. Број делилаца броја 2015 је $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ (**7 поена**).
б) Растављањем броја 2016 на просте чиниоце добијамо да је $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ (**3 поена**). Број 2 се као фактор делиоца појављује 0, 1, 2, 3, 4 или 5 пута, број 3 се појављује 0, 1 или 2, а број 7 се појављује 0 или 1 пут. Закључујемо да број 2016 има $(5 + 1) \cdot (2 + 1) \cdot (1 + 1) = 6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$ делилаца (**10 поена**).

5. Међу датим бројевима три су парна и четири непарна (**5 поена**). Међу бројевима a, c, e, g барем један је непаран, па је барем једна од разлика $a-1$, $c-3$, $e-5$, $g-7$ паран број, одакле и цео производ мора бити паран број (**15 поена**).

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа
27.02.2016 – VII разред

1. Колико има троцифрених бројева у чијем се запису појављују тачно две једнаке цифре?

2. У бубњу је 11 куглица и на свакој од њих је записан по један број из скупа $\{2^3, 2^4, \ldots, 2^{13}\}$. На случајан начин се истовремено извлаче 3 куглице из бубња.

а) Да ли се може добити да производ бројева са извучених куглица буде 2^{17} ако је на једној од извучених куглица записан број 2^{11}?

б) На колико различитих начина се може добити да производ бројева са извучених куглица буде 2^{17}?

3. Колико има бројева мањих од 1000 који се завршавају цифром 3 и једнаки су збиру квадрата два проста броја?

4. Једнакостранични троугао AMN уписан је у квадрат $ABCD$ тако да теме M припада дужи BC, а теме N дужи CD.

а) Докажи да је права AC оса симетрије троугла AMN.

б) Израчунај дужину странице тог троугла ако је дужина странице квадрата једнака $\sqrt{3}+1$.

5. Дијагонале конвексног четвороугла $ABCD$ секу се у тачки O и деле четвороугао на троуглове OAB, OBC, OCD и ODA. Докажи да је производ површина троуглова OAB и OCD једнак производу површина троуглова OBC и ODA.

Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

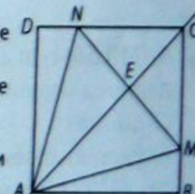
1. **(МЛ 49/5)** Има девет троцифрених бројева у којима се два пута појављује цифра 0 (при чему 0 не може бити прва цифра) (**5 поена**). Посматрајмо сада цифре различите од нуле. Нека се таква цифра појављује тачно два пута. Ако се она не појављује на првом месту, онда цифра на првом месту може бити нека од осам цифара, различитих од те цифре и од нуле (**5 поена**). У остала два случаја (кад се иста цифра појављује као прва и друга или као прва и трећа), онда трећа цифра у запису може бити било која од преосталих 9 цифара (**5 поена**). Дакле, број тражених бројева је $9 + 9 \cdot 8 + 2 \cdot 9 \cdot 9 = 9 + 72 + 162 = 243$ (**5 поена**).

2. а) Не може. Производ две извучене куглице може бити најмање 2^7 $(=2^3 \cdot 2^4)$, а како је извучена куглица 2^{11} на преостале две куглице производ не може да буде 2^6 (**8 поена**).
б) На 5 различитих начина: $2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^{10}, 2^3 \cdot 2^5 \cdot 2^9, 2^3 \cdot 2^6 \cdot 2^8, 2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^8, 2^4 \cdot 2^6 \cdot 2^7$.
(1 решење: 2 поена, 2 решења: 4 поена, 3 решења: 6 поена, 4 решења: 8 поена, свих 5 тачних решења: **12 поена**)

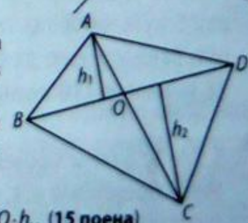
3. Како су тражени бројеви једнаки збиру квадрата два проста броја и непарни су, закључујемо да један од та два броја мора бити паран, тј. 2 (**5 поена**). Како се збир завршава цифром 3, а један сабирак је $2^2 = 4$, квадрат другог броја мора да се завршава цифром 9, тј. број се мора завршавати цифром 3 или 7 (**5 поена**). Закључујемо да други број може бити 3, 7, 13, 17 и 23 (**5 поена**), па постоји 5 тражених бројева ($2^2 + 3^2 = 13$, $2^2 + 7^2 = 53$, $2^2 + 13^2 = 173$, $2^2 + 17^2 = 293$, $2^2 + 23^2 = 533$) (**5 поена**).

4. а) Означимо са a дужину странице квадрата, а са x дужину странице троугла. $\Delta ABM \cong \Delta AND$ (ССУ: $\measuredangle ABM = \measuredangle ADN = 90°$, $AB = AD$, $AM = AN$). Из подударности је $\measuredangle BAM = \measuredangle DAN = 15°$, па је $\measuredangle MAC = \measuredangle NAC = 30°$, значи $AC \perp MN$, а одатле је AC оса симетрије троугла AMN (**5 поена**).

б) Нека је E пресек дијагонале AC и странице MN. Имамо да је $AE = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$, док из једнакокрако-правоуглог троугла CMN је $CE = \dfrac{x}{2}$. Како је $a\sqrt{2} = AC = AE + CE = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} + \dfrac{x}{2}$ (**10 поена**) и $a = \sqrt{3}+1$, страница троугла је $x = 2\sqrt{2}$ (**5 поена**).



5. **(МЛ 48/1)** Означимо површине наведених троуглова редом са S_1, S_2, S_3, S_4. Нека су h_1 и h_2 дужине нормала из тачака A и C редом на дијагоналу BD. Видимо да је h_1 заједничка висина троуглова OAB и ODA из темена A, док је h_2 заједничка висина троуглова OBC и OCD из темена C. Тада је



$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot h_1,\quad S_2 = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot h_2,\quad S_3 = \frac{1}{2} \cdot DO \cdot h_2,\quad S_4 = \frac{1}{2} \cdot DO \cdot h_1,$$ (**15 поена**)

одакле се види да је $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4 = \dfrac{1}{4} \cdot BO \cdot DO \cdot h_1 \cdot h_2$ (**5 поена**).

Министарство просвете, науке и технолошког развоја
ДРУШТВО МАТЕМАТИЧАРА СРБИЈЕ

Општинско такмичење из математике ученика основних школа
27.02.2016.

VIII разред

1. Реши једначину $\left|\frac{x-2}{3}-\frac{6-2x}{4}\right|=2.$

2. Правилна тространа призма $ABCA_1B_1C_1$ основне ивице 10cm пресечена је са равни одређеном тачкама A, B и C_1. Ако је површина пресека једнака 60cm^2 одреди запремину призме.

3. Дрвена коцка је обојена споља, а затим исечена на једнаке мале коцке (њих најмање 27). На колико је малих коцки исечена велика коцка ако се зна да међу малим коцкама има исто толико коцки са једном обојеном страном колико и оних код којих ниједна страна није обојена?

4. Тачке A, B и C су са исте стране пројекцијске равни и од ње су удаљене редом 7cm, 17cm и 27cm. Дужина тежишне дужи AD троугла ABC је 25cm. Одреди дужину пројекције дужи AD на ту пројекцијску раван.

5. Збир 12 различитих природних бројева је 83. Докажи да је производ тих бројева дељив са 420.

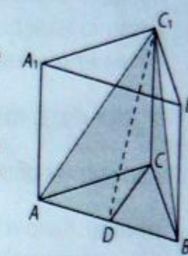
Сваки задатак се бодује са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

VIII РАЗРЕД

Признавати сваки тачан поступак који се разликује од кључа. Бодовање прилагодити конкретном начину решавања.

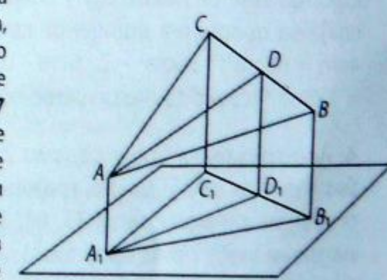
1. **(МЛ 48/1)** Сређивањем добијамо $\left|\frac{5x-13}{6}\right|=2$ (**5 поена**). Сада је $\frac{5x-13}{6}=2$ или $\frac{5x-13}{6}=-2$ (**10 поена**; 0 ако се наведе само једна могућност), одакле је $x=5$ или $x=\frac{1}{5}$ (**5 поена**).

2. Нека је D подножје нормале из C_1 на AB. Троугао ABC_1 је једнакокрак и његова површина је $\frac{AB\cdot C_1D}{2}=60\text{cm}^2$, одакле је $C_1D=12\text{cm}$ (**5 поена**). Троугао CDC_1 је правоугли и важи $C_1D^2=CD^2+CC_1^2$. Како је CD висина једнакостраничног троугла то је $CD=5\sqrt{3}\text{cm}$, а одатле је $CC_1=\sqrt{69}\text{cm}$ (**10 поена**). Запремина призме је $75\sqrt{23}\text{cm}^3$ (**5 поена**).



3. Број малих коцки мора бити куб природног броја. Нека је n^3 број малих коцки. Тада је број коцки без иједне обојене стране $(n-2)^3$ (**5 поена**), а број коцки са једном обојеном страном $6(n-2)^2$ (**5 поена**). Следи да је $(n-2)^3=6(n-2)^2$, одакле је $n-2=6$, тј. $n=8$ (**8 поена**). Велика коцка је исечена на $8^3=512$ малих коцки (**2 поена**).

4. **(МЛ 49/2)** Нека су ознаке као на слици. Тада је $AA_1=7\text{cm}$, $BB_1=17\text{cm}$, $CC_1=27\text{cm}$, $AD=25\text{cm}$. Четвороугао BB_1C_1C је трапез ($BB_1 \parallel CC_1$) па је дужина средње линије $DD_1=22\text{cm}$ (**7 поена**). Четвороугао ADD_1A_1 је правоугли трапез, а дужина тражене пројекције једнака је страници трапеза A_1D_1. Применом Питагорине теореме на правоугли трапез израчунавамо да је дужина тражене пројекције $A_1D_1^2=AD^2-(DD_1-AA_1)^2$ (**10 поена**), тј. $A_1D_1=20\text{cm}$ (**3 поена**).



5. $420=3\cdot4\cdot5\cdot7$. Претпоставимо да ниједан од 12 датих бројева чији је збир 83 није дељив са 3. Минимум њиховог збира је $1+2+4+5+7+8+10+11+13+14+16+17=108>83$. Следи да неки од 12 бројева мора бити дељив са 3, па је и њихов производ дељив са 3 (**4 поена**). Аналогно формирајући посебно минимуме збирова бројева који нису дељиви са 4 (96) (**4 поена**), који нису дељиви са 5 (90) (**4 поена**) и бројева који нису дељиви са 7 (84) (**4 поена**) закључујемо да бар неки од бројева морају бити дељиви са 4, са 5 и са 7. Дакле, производ је дељив са 3, 4, 5 и 7 па је дељив и са 420 (**4 поена**).