Основна школа «Љупче Николић», Алексинац

КОМПЛЕТ ЗАДАТАКА СА РЕШЕЊИМА

МАТЕМАТИКА

школско такмичење

23. 01. 2016.

Друштво математичара Србије

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

3. разред 23.01.2016.

1. Нацртај дуж $AB = 16\,\mathrm{cm}$ и на њој тачку C тако да је $AC = 10\,\mathrm{cm}$. Ако је M средиште дужи AC, а N средиште дужи CB, израчунај дужину дужи MN.
2. Ако је $a + b = 125$, израчунај:

   а) $500 - (a + b)$; б) $(a + 150) + (b - 150)$.
3. Збир цифара броја 427 је $4 + 2 + 7 = 13$ Напиши:

   а) најмањи троцифрен паран број чији је збир цифара 11;

   б) највећи троцифрен непаран број чији је збир цифара 8.
4. Израчунај вредност ПЕДЕСЕТ ПОЛОВИНА МАЊЕ ТРИ, па резултат сабери са бројем слова у ПЕДЕСЕТ ПОЛОВИНА МАЊЕ ТРИ.
5. Користећи римске цифре **I, V, X, L** и **C** напиши најмањи могући број. Сваку цифру треба да употребиш тачно једанпут и друге знакове не смеш да користиш.

Сваки задатак се бодује са по 20 поена.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу

3. разред

1. Слика [10 поена]. Резултат: $8\,\mathrm{cm}$ [10 поена]. [МЛ 2/50, стр. 14, зад. 12]
2. а) $500 - (a + b) = 500 - 125 = 375$ [10 поена]; б) 125 [10 поена]. [МЛ 2/50, стр. 13, зад. 9]
3. а) 128 [10 поена], б) 701 [10 поена]. [МЛ 1/48, стр. 10, зад. 12]
4. 22 [12 поена] + 22 [6 поена] = 44 [2 поена].
5. CXLIV [20 поена].

Друштво математичара Србије

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

4. разред 23.01.2016.

1. Нацртај две кружнице, једну полупречника $2\,\mathrm{cm}$ и једну полупречника $3\,\mathrm{cm}$, тако да најближе тачке тих кружница буду на растојању $1\,\mathrm{cm}$. На којем су растојању њихове најудаљеније тачке?

2. За колико је збир броја 15 099 и његовог следбеника већи од разлике тог броја и његовог претходника?

3. Дата су три броја чији је збир једнак 2016. Ако се један од њих смањи за 216, а други повећа за 612, шта треба урадити са трећим бројем да би збир та три броја остао исти?

4. У једном воћњаку правоугаоног облика засађене су шљиве тако да је растојање између њих (у сваком реду) $4\,\mathrm{m}$, а растојање између редова је $5\,\mathrm{m}$. Растојање између прве и последње воћке у сваком реду је $56\,\mathrm{m}$, а растојање између првог и последњег реда је $30\,\mathrm{m}$. Колико има стабала шљива у том воћњаку?

5. Треба попунити поља у датом квадрату тако да збирови бројева по врстама, колонама и дијагоналама буду једнаки. Које бројеве треба написати у пољима означеним са А, Б и В?

В	Б	1800
	1500	
1200	А	1400

Сваки задатак се бодује са по 20 поена.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу

4. разред

1. Слика [10 поена]. Резултат: $4+1+6=11\,\mathrm{cm}$ [10 поена].
2. $(15099+15100)-(15099-15098)$ [10 поена] $=30199-1=30198$ [10 поена]. [МЛ 1/50, стр. 12, зад. 6]
3. *Прво решење.* Треба да се смањи за $612-216$ [18 поена] $=396$ [2 поена].

   Друго решење. Нови збир износи $2016-216+612=2412$ [8 поена], па трећи број треба да се смањи за $2412-2016$ [10 поена] $=396$ [2 поена]. [МЛ 1/50, стр. 12, зад. 7]
4. Има 7 редова по 15 шљива [15 поена], укупно 105 стабала [5 поена]. [МЛ 2/50, стр. 16, зад. 10]
5. $А=1900$, $Б=1100$, $В=1600$ [једна тачна вредност: 5 поена, 2 тачне вредности: 10 поена, све три: 20 поена].

Друштво математичара Србије

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

5. разред 23.01.2016.

1. Ленка ради у продавници спортске опреме. Једног дана је продавала само патике и тренерке. Продато је укупно 45 производа.

   а) Колико купаца је купило оба производа ако је само патике купило њих 18, а само тренерку њих 15?

   б) Колико тренерки је продато тог дана?

2. Одреди угао који је за $20°16'$ мањи од свог суплементног угла.

3. Ана је сабрала дужине трију страница једног правоугаоника и добила $35\,\mathrm{cm}$, а Боба је сабрала дужине трију страница истог правоугаоника и добила $40\,\mathrm{cm}$. Израчунај површину тог правоугаоника.

4. Ако би се коцка од 1 кубног метра разрезала на коцкице од 1 кубног центиметра и добијене коцкице ставиле једна на другу, колико би био висок тако добијени стуб?

5. Напиши највећи и најмањи петоцифрен број тако да се у сваком од њих појављује бар једном свака од цифара 0, 1, 2 и 3.

Сваки задатак се бодује са по 20 поена.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу

5. разред

1. а) $(45-18-15)/2=6$ [15 поена], б) $15+6=21$ [5 поена]. [МЛ 1/48, стр. 16, зад. 10]
2. $(180° - 20°16')/2$ [10 поена] $= 79°52'$ [10 поена]. [МЛ 5/49, стр. 11, зад. 19]
3. Како је $35 = 2\cdot 10+15$ и $40 = 2\cdot 15+10$, странице су $15\,\mathrm{cm}$ и $10\,\mathrm{cm}$ [18 поена], а површина $150\,\mathrm{cm}^2$ [2 поена]. [МЛ 1/50, стр. 35, зад. 2538]
4. Има $100\times 100\times 100 = 1\,000\,000$ коцкица, па је висина стуба $1\,000\,000\,\mathrm{cm} = 10\,000\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{km}$ [20 поена (било који од одговора)].
5. Највећи: 93210 [10 поена], најмањи: 10023 [10 поена]. [МЛ 1/48, стр. 13, зад. 8]

Друштво математичара Србије

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

6. разред 23.01.2016.

1. Дат је квадрат $ABCD$ странице $5\,\mathrm{cm}$. Конструиши тачку M која је једнако удаљена од темена A и B и која је од темена C удаљена $3\,\mathrm{cm}$. Колико решења има задатак?
2. Израчунај: а) највећу; б) најмању вредност израза $7-(10+x+y)$ ако је $|x|=5$, $|y|=8$.
3. Дати су скупови $A=\{1,2,3,\ldots,2015\}$ и $B=\{0,-1,-2,\ldots,-2016\}$. Број x је збир, а број y је производ свих елемената скупа $A\cup B$, док је $z=1+3+5+\cdots+2015+(-2-4-6-\cdots-2016)$. Упореди бројеве $|x-y|$, $|y-z|$ и $|z-x|$.
4. Колико има четвороцифрених бројева у којима се појављују цифре 1, 2, 3 и 4, свака тачно једанпут, при чему се ниједна цифра не налази између две цифре које су веће од ње? Напиши све те бројеве.
5. Означимо са $s(n)$ збир свих природних бројева који су делиоци броја n (на пример, $s(6)=1+2+3+6=12$). Израчунати $s(s(20)-s(10))$.

Сваки задатак се бодује са по 20 поена.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу

6. разред

1. Слика [15 поена]. Одговор: 2 решења [5 поена] [МЛ 5/48, стр. 40, зад. 2908]
2. а) $7-(10+(-5)+(-8))$ [8 поена] $=10$ [2 поена], б) $7-(10+5+8)$ [8 поена] $=-16$ [2 поена]. [МЛ 1/50, стр. 17, зад. 9]
3. $x=-2016$ [5 поена], $y=0$ [5 поена], $z=-1008$ [5 поена], $|y-z|=|z-x|<|x-y|$ [5 поена]. [МЛ 2/50. стр. 40, зад. 468]
4. 1234, 1243, 1342, 1432, 2341, 2431, 3421, 4321. Има их 8. [1–3 тачна броја: 5 поена, 4 тачна броја: 10 поена, 5–7 тачних бројева: 15 поена, сви: 20 поена; ако међу наведеним бројевима има и нетачних, смањити додељени број поена за број нетачних]
5. $s(20)=1+2+4+5+10+20=42$ [6 поена], $s(10)=1+2+5+10=18$ [6 поена], $s(42-18)=s(24)=1+2+3+4+6+8+12+24=60$ [8 поена].

Друштво математичара Србије

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

7. разред 23.01.2016.

1. Ако су a и b цели бројеви и $a\sqrt{2}+b=\sqrt{(4-3\sqrt{2})^2}-5$, израчунај разлику $a-b$.
2. Израчунај: а) $(-3\sqrt{5})^2+(3\sqrt{2})^2-2\cdot(2\sqrt{10})^2$; б) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-2\cdot\left(\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2$.
3. Дијагонале једнакокраког трапеза се секу под правим углом. Ако је површина трапеза $32\,\mathrm{cm}^2$, израчунај његову висину.
4. Странице четвороугла $ABCD$ су $AB=5\,\mathrm{cm}$, $BC=13\,\mathrm{cm}$, $CD=16\,\mathrm{cm}$, $DA=20\,\mathrm{cm}$, а дијагонала $AC=12\,\mathrm{cm}$. Израчунај површину четвороугла $ABCD$.
5. Колико има петоцифрених бројева $\overline{1{*}76{*}}$ који су дељиви са 18?

Сваки задатак се бодује са по 20 поена.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу

7. разред

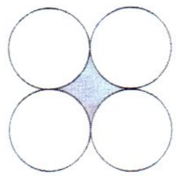
1. Због $4-3\sqrt{2}<0$ је $\sqrt{(4-3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}-4$ [10 поена], па се дата једнакост своди на $a\sqrt{2}+b=3\sqrt{2}-9$. Како су a и b цели бројеви, следи да је $a=3$, $b=-9$, $a-b=12$ [10 поена]. [МЛ 5/49, стр. 15, зад. 13]
2. а) -17 [10 поена]; б) $\dfrac{7}{6}$ [10 поена]. [МЛ 1/50, стр. 19, зад. 10]
3. Из $P=32=\frac{1}{2}d^2$ се добија да је дијагонала трапеза $d=8\,\mathrm{cm}$. [5 поена] Ако су x и y делови на које једна дијагонала дели другу, а a и b дужине основица, онда је $a=x\sqrt{2}$, $b=y\sqrt{2}$ и $a+b=(x+y)\sqrt{2}=d\sqrt{2}$, па је збир страница $a+b=8\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. [10 поена] Из формуле за површину се добија да је висина $h=4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. [5 поена] [МЛ 5/49, стр. 15, зад. 14]
4. На основу обрнуте Питагорине теореме, троуглови ABC и ACD су правоугли [10 поена]. Површина је $(\frac{1}{2}\cdot5\cdot12+\frac{1}{2}\cdot12\cdot16)\,\mathrm{cm}^2=126\,\mathrm{cm}^2$. [10 поена]
5. Тражени број мора бити паран, па му последња цифра може бити 0, 2, 4, 6 или 8 [6 поена]. Како збир цифара траженог броја мора бити дељив са 9 [7 поена], за сваку од поменутих 5 могућности постоји по једна могућност за избор друге цифре, сем за 4, када постоје две могућности (0 и 9). Укупно има 6 таквих бројева [7 поена].

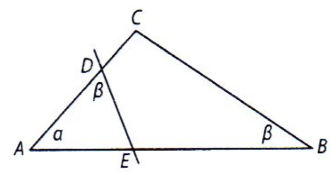
Друштво математичара Србије

ШКОЛСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

8. разред 23.01.2016.

1. Четири подударна круга полупречника $10\,\mathrm{cm}$ додирују се споља (види слику!). Израчунај површину осенченог дела равни између кругова.





2. Странице троугла ABC на слици су $BC = 10\,\mathrm{cm}$, $CA = 8\,\mathrm{cm}$ и $AB = 12\,\mathrm{cm}$. Ако је $DE = 6\,\mathrm{cm}$, израчунај колико је $AD + AE$.

3. Нека су a, b, c реални бројеви различити од нуле и такви да је $a + \dfrac{b}{c} = b + \dfrac{c}{a} = c + \dfrac{a}{b} = 1$. Израчунај вредност израза $ab + bc + ca$.

4. Милашин и Радашин купују сулундаре. Милашину недостаје 600 динара за куповину 4 сулундара, а Радашину недостаје 600 динара за куповину 5 сулундара. Ако се удруже, недостајаће им 600 динара за куповину 6 сулундара. Колико кошта један сулундар?

5. Решити једначину $\left(\dfrac{7x+2}{5} - \dfrac{2x-3}{2}\right)^2 - 5{,}13 = \left(\dfrac{2}{5}x\right)^2$.

Сваки задатак се бодује са по 20 поена.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

РЕШЕЊА

Признавати свако тачно решење које се разликује од решења у кључу. Бодовање прилагодити конкретном решењу

8. разред

1. $(400 - 100\pi)\,\mathrm{cm}^2$. [20 поена] [МЛ 5/49, стр. 15, зад. 16]

2. Из сличности $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ се добија $AD = 7{,}2\,\mathrm{cm}$ [8 поена] и $AE = 4{,}8\,\mathrm{cm}$, [8 поена] па је $AD + AE = 12\,\mathrm{cm}$. [4 поена] [МЛ 1/50, стр. 21, зад. 4]

3. Из датих једнакости следи да је $ca + b = c$, $ab + c = a$ и $bc + a = b$. [5 поена] Сабирањем се добија да је $ab + bc + ca + a + b + c = a + b + c$, па је $ab + bc + ca = 0$. [15 поена] [МЛ 1/50, стр. 41, зад. 464]

4. *Прво решење.* Милашину и Радашину заједно недостаје 1200 динара за куповину 9 ($= 4 + 5$) сулундара. [10 поена] С друге стране, недостаје им 600 динара за куповину 6 сулундара. Следи да цена три сулундара износи 600 динара. [10 поена] Дакле, цена једног сулундара је 200 динара.

   Друго решење. Нека Милашин има m динара, Радашин r динара и нека је цена једног сулундара x динара. Тада је $m = 4x - 600$, $r = 5x - 600$ и $m + r = 6x - 600$ [10 поена], па је $(4x-600)+(5x-600) = 6x - 600$, одакле је $9x - 1200 = 6x - 600$ и $x = 200$ [10 поена].

5. Трансформацијом једначине се редом добија: $\left(\dfrac{4x+19}{10}\right)^2 - 5{,}13 = \dfrac{4}{25}x^2$ [4 поена],
   $\dfrac{16x^2 + 152x + 361}{100} - 5{,}13 = \dfrac{4}{25}x^2$ [4 поена], $\dfrac{4}{25}x^2 + 1{,}52x + 3{,}61 - 5{,}13 = \dfrac{4}{25}x^2$ [4 поена],
   $1{,}52x - 1{,}52 = 0$ [4 поена], $x = 1$ [4 поена].