Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОПШТИНСКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ УЧЕНИКА ОСНОВНИХ ШКОЛА

11.03.2006.

7. РАЗРЕД

1. Израчунати вредност израза $\frac{a^2+b^2}{ab}$ ако се зна да је $\frac{a+b}{b} = 2 - \sqrt{2}$.

2. Нека су a и b дужине основица AB и CD, а c дужина крака једнакокраког трапеза $ABCD$ са узајамно нормалним дијагоналама. Доказати да је $c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

3. Нека је $a = 2^{2005} - 2^{2004} + 2^{2003}$, $b = 2^{2004} - 2^{2005} + 2^{2006}$, а $c = 3\sqrt{3} \cdot 2^{2003}$. Доказати да је збир квадрата нека два од бројева a, b, c једнак квадрату трећег.

4. Нека су P и R тачке страница AB и CD паралелограма $ABCD$ и нека је $\{Q\} = PC \cap BR$ и $\{S\} = AR \cap DP$. Доказати да је површина четвороугла $PQRS$ једнака збиру површина троуглова ASD и BCQ.

5. Бројеви $1, 2, \ldots, 9$ су подељени у три групе. Доказати да бар у једној од тих група производ бројева није мањи од 72.

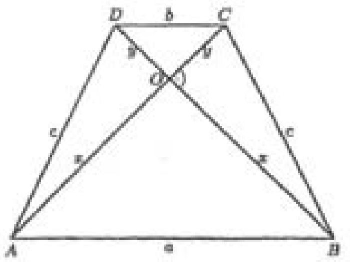
Сваки задатак бодује се са по 20 бодова.
Израда задатака траје 120 минута.
Решење сваког задатка кратко и јасно образложити.

7. РАЗРЕД

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА:

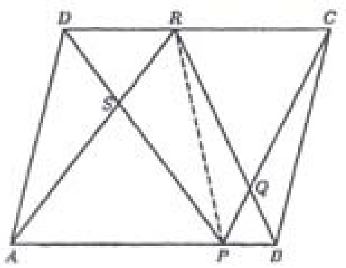
1. Из $\frac{a+b}{b} = 2-\sqrt{2}$ следи да је $\frac{a}{b}+1 = 2-\sqrt{2}$, тј. $\frac{a}{b} = 1-\sqrt{2}$. (6 бодова) Одатле је $\frac{b}{a} = \frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1}{1-\sqrt{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = -(1+\sqrt{2})$. (6 бодова) Како је $\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, (5 бодова) вредност датог израза је $(1-\sqrt{2})+(-1-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$. (3 бода)

2. Нека је тачка O пресек дијагонала датог трапеза и нека су x и y дужине дужи AO и CO. Тада су и дужине дужи BO и DOтакође x и y. Како су троуглови ABO, CDO и BCO правоугли, користећи Питагорину теорему добијамо да је $a^2 = 2x^2$, $b^2 = 2y^2$ и $c^2 = x^2+y^2$. (свака једнакост по 4 бода) Одатле следи да је $2c^2 = a^2+b^2$, па је $c = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. (8 бодова)



3. Како је $a = 2^{2003}\cdot(2^2-2+1) = 3\cdot 2^{2003}$, $b = 2^{2004}\cdot(1-2+2^2) = 3\cdot 2^{2004} = 6\cdot 2^{2003}$ и $c = 3\sqrt{3}\cdot 2^{2003}$, узимајући да је $2^{2003} = A$, добијамо да је $a^2 = 9A^2$, (6 бодова) $b^2 = 36A^2$ (6 бодова) и $c^2 = 27A^2$. Следи да је $a^2+c^2 = b^2$. (8 бодова)

4. У трапезу $APRD$ троуглови APR и APD имају једнаке површине, што значи да и троуглови PRS и ASD имају једнаке површине. На исти начин се показује да и троуглови PQR и BCQ имају једнаке површине. Према томе, површина четвороугла $PQRS$ је једнака збиру површина троуглова ASD и BCQ. (20 бодова)



5. Претпоставимо супротно, тј. да је у свакој групи производ бројева мањи од 72. Тада би производ бројева у свакој од група био мањи или једнак 71, па би производ свих бројева био мањи или једнак 71^3, односно 357911. Међутим, производ бројева од 1 до 9 је 362880. Према томе, дата претпоставка није тачна, односно постоји група у којој производ бројева није мањи од 72. (20 бодова)